

# 超準解析の基礎講義資料

— 超実数の構成から位相環の構造、およびネットの収束理論 —

## 第1章：超フィルターを用いた超実数および超自然数の構成

### 1.1 舞台の設定：実数列の集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

超準解析における「超実数体」を代数的に構成する最も標準的なアプローチは、すべての実数列の集合  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  から出発することです。この集合には、通常の実数列  $(3, 3, 3, \dots)$  や、ゼロに収束する数列  $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ 、無限大に発散する数列  $(1, 2, 3, \dots)$  など、あらゆる実数列が含まれます。

この数列の集合に対して、成分ごとの足し算と掛け算を定義することで、 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  は可換環になります。しかし、このままでは数体系として不都合が生じます。なぜなら、例えば  $a = (1, 0, 1, 0, \dots)$  と  $b = (0, 1, 0, 1, \dots)$  という2つの非ゼロの数列の積をとると、全ての成分が0である零数列  $(0, 0, 0, 0, \dots)$  になってしまうからです。このような「ゼロ因子」が存在するため、 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  は体 (Field) になりません。そこで、「ある意味で等しい」数列同士を同じものとみなす（同値類をとる）ための判定基準が必要になります。

### 1.2 自由超フィルター $\mathcal{U}$

「2つの数列がどのインデックスにおいて一致していれば、全体として等しいとみなしてよいか」を決めるのが、自然数の集合  $\mathbb{N}$  上の**自由超フィルター (Free Ultrafilter)** です。直感的には、「 $\mathbb{N}$  の部分集合のうち、どれを『圧倒的多数 (ほとんどすべて)』のインデックス集合と認めるか」という投票システムのようなものです。

#### 定義 1.1 (自由超フィルター)

自然数集合  $\mathbb{N}$  の部分集合の族  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  が以下の5つの条件を満たすとき、 $\mathcal{U}$  を  $\mathbb{N}$  上の**自由超フィルター**と呼ぶ。

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$  (空集合は「多数派」にはなれない)
- $A \in \mathcal{U}$  かつ  $A \subseteq B$  ならば  $B \in \mathcal{U}$  (多数派を含む集合もまた多数派である)
- $A \in \mathcal{U}$  かつ  $B \in \mathcal{U}$  ならば  $A \cap B \in \mathcal{U}$  (多数派同士の共通部分も多数派を維持する)

4. **極大性 (超フィルターの条件)** : 任意の  $A \subseteq \mathbb{N}$  について、 $A \in \mathcal{U}$  または  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$  のいずれか一方が必ず成り立つ (どんな部分集合も、多数派か少数派のいずれかに完璧に二分される)。
5. **自由 (非単項) の条件** :  $\mathcal{U}$  は有限集合を一切含まない (有限個のインデックスでの一致という例外は、常に「少数派」として切り捨てられる)。

このような自由超フィルターの存在は、集合論における「ツォルンの補題 (あるいは選択公理)」を用いることで厳密に証明されます。

### 1.3 同値関係 $\sim$ と超実数体 ${}^*\mathbb{R}$ の誕生

用意した自由超フィルター  $\mathcal{U}$  を用いて、2つの実数列  $a = (a_n)$  と  $b = (b_n)$  の間に同値関係  $\sim$  を導入します。

#### 定義 1.2 (超積における同値関係)

$$a \sim b \iff \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$$

つまり、2つの数列の値が一致しているインデックスの集合が、超フィルター  $\mathcal{U}$  に属する (= 圧倒的多数である) とき、またそのときに限り、2つの数列は「等しい」とみなす。

この同値関係  $\sim$  によって実数列の集合  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  を割った商集合 (同値類の集合) こそが、**超実数体 (Hyperreal number field)  ${}^*\mathbb{R}$**  です。

$${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

数列  $(a_n)$  の属する同値類を  $[a_n]$  と表記することにします。この世界には、以下のような新しい「数」が共存しています。

- **標準的な実数** : 任意の実数  $r \in \mathbb{R}$  は、定数列の同値類  $[r, r, r, \dots]$  として  ${}^*\mathbb{R}$  の中に自然に埋め込まれます。
- **無限小 (Infinitesimal)** : 例えば  $\varepsilon = [1, 1/2, 1/3, \dots]$  を考えます。任意の標準的な正の実数  $r \in \mathbb{R}$  に対し、 $1/n < r$  が成り立たないインデックス  $n$  は有限個しかありません。自由超フィルターは有限集合を排除するため、 $1/n < r$  が成り立つインデックス集合が  $\mathcal{U}$  に属します。したがって、 $0 < \varepsilon < r$  が全ての標準的正実数に対して成り立ち、これが厳密な意味での「正の無限小」となります。
- **無限大 (Infinite)** :  $\omega = [1, 2, 3, \dots]$  は、どんな標準的な実数よりも大きくなる「無限大超実数」の一例です。

### 1.4 超自然数 ${}^*\mathbb{N}$ の構成

全く同じ超フィルター  $\mathcal{U}$  を用いて、実数列の代わりに「自然数の数列  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 」を同値関係  $\sim$  で割ることで、**超自然数 (Hypernatural number)** の集合  ${}^*\mathbb{N}$  が構成されます。

$${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \sim$$

ここには、標準的な自然数  $n = [n, n, n, \dots]$  だけでなく、 $H = [1, 2, 3, \dots]$  や  $K = [2, 4, 8, \dots]$  のような、通常の数よりも大きな「無限大超自然数」が無数に含まれています。

## 第2章：超実数列と超有限和

### 2.1 内部的な超実数列 ${}^*\mathbb{N} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$

超準解析の議論において、 ${}^*\mathbb{N}$  から  ${}^*\mathbb{R}$  へのすべての関数を無差別に扱おうと、論理的な破綻をきたします。モデルの内側で「行儀よく」振る舞う関数を**内部関数 (Internal function)** と呼びます。超積の構成において、内部的な超実数列  $A$  は「標準的な数列の数列」として定義されます。

#### 定義 2.1 (内部的な超実数列)

各成分  $m \in \mathbb{N}$  に対して標準的な数列  $a^{(m)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているとする。これらを束ねた列  $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots)$  によって代表される内部数列  $A$  の、超自然数  $N = [n_1, n_2, n_3, \dots] \in {}^*\mathbb{N}$  における値  $A_N$  は、成分ごとの評価による同値類として次のように定義される。

$$A_N = [a_{n_1}^{(1)}, a_{n_2}^{(2)}, a_{n_3}^{(3)}, \dots]$$

特に、すべての成分で同じ一つの標準数列  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  を用いる場合、これは  $a$  の**自然な延長 (Nonstandard extension)**  ${}^*a$  と呼ばれ、 ${}^*a_N = [a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots]$  となります。

### 2.2 超有限和 $\sum_{n=0}^H A_n$ の厳密な定義

無限大超自然数  $H$  までの足し算をおこなう「超有限和」は、無限回の足し算を直接実行しているのではなく、超積の成分ごとに「標準的な有限和」を計算し、それを超フィルターで束ねることで定義されます。

#### 定義 2.2 (超有限和)

内部数列  $A$  が標準数列の列  $(a^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  で表され、超自然数  $H$  が自然数列の同値類  $[h_1, h_2, h_3, \dots]$  で表されているとき、超有限和  $\sum_{n=0}^H A_n$  を次のように定義する。

$$\sum_{n=0}^H A_n = \left[ \sum_{k=0}^{h_1} a_k^{(1)}, \sum_{k=0}^{h_2} a_k^{(2)}, \sum_{k=0}^{h_3} a_k^{(3)}, \dots \right]$$

右辺の各成分  $\sum_{k=0}^{h_m} a_k^{(m)}$  は、通常の標準的な実数の世界における**有限和**に過ぎません。したがって、結合法則や分配法則といった有限和の代数的性質が、この超有限和へ完全に引き継がれることになります。これが「移行原理 (Transfer Principle)」の具体的な現れです。

### 具体例：等比級数と $0.999\dots$ の議論

標準数列  $a_n = \frac{9}{10^n}$  の延長について、無限大超自然数  $H = [h_1, h_2, h_3, \dots]$  までの超有限和を計算する。

$$\sum_{n=1}^H \frac{9}{10^n} = \left[ \sum_{k=1}^{h_1} \frac{9}{10^k}, \sum_{k=1}^{h_2} \frac{9}{10^k}, \sum_{k=1}^{h_3} \frac{9}{10^k}, \dots \right]$$

各成分は標準的な有限等比級数であるため、公式より以下のように変形できる。

$$= \left[ 1 - \frac{1}{10^{h_1}}, 1 - \frac{1}{10^{h_2}}, 1 - \frac{1}{10^{h_3}}, \dots \right]$$

同値類の成分ごとの演算規則に従って分解すると、

$$= [1, 1, 1, \dots] - \left[ \frac{1}{10^{h_1}}, \frac{1}{10^{h_2}}, \frac{1}{10^{h_3}}, \dots \right] = 1 - \frac{1}{10^H}$$

このように、無限大の項までの和が  $1 - \frac{1}{10^H}$  という明確な超実数として求まります。

## 第3章：超実数体の位相環としての構造と標準パート

### 3.1 有限超実数 $\mathcal{O}$ と無限小 $\mathcal{M}$

${}^*\mathbb{R}$  は全順序体 (Total ordered field) であるため、开区間  $(a, b) = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a < x < b\}$  を開基とする**順序位相 (Order Topology)** が自然に導入されます。この順序位相に関して、加法と乗法が連続写像となるため、 ${}^*\mathbb{R}$  は**位相環 (位相体)** の構造を持ちます。この位相環の内部構造を調べるために、代数的な部分集合を定義します。

- **有限超実数の集合  $\mathcal{O}$** ：ある標準的な自然数  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $|x| < n$  と抑えられる超実数  $x$  の集合。
- **無限小の集合  $\mathcal{M}$** ：すべての標準的な正の実数  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $|x| < r$  を満たす超実数  $x$  の集合。

代数学の言葉を使うと、 $\mathcal{O}$  は  ${}^*\mathbb{R}$  における付値環（部分環）であり、 $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{O}$  における唯一の極大イデアルを構成します。

## 3.2 標準パート定理 (The Standard Part Theorem)

標準世界 ( $\mathbb{R}$ ) と超準世界 ( ${}^*\mathbb{R}$ ) を繋ぐ最も重要な架け橋が、次の定理です。

### 定理 3.1 (標準パート定理)

任意の有限超実数  $x \in \mathcal{O}$  に対して、以下の条件を満たす標準実数  $r \in \mathbb{R}$  がただ一つ存在する。

$$x - r \in \mathcal{M}$$

この一意に定まる実数  $r$  を対応させる写像を **標準パート写像 (Standard part map)** と呼び、 $st(x) = r$  と表す。

この定理の成立には、標準実数  $\mathbb{R}$  が持つ「上に有界な空でない部分集合は上限を持つ」という位相的完備性が決定的な役割を果たしています。

## 3.3 モナドと開集合・連続性の特徴づけ

アブラハム・ロビンソンは、ある標準実数  $r$  に無限に近い超実数全体の集合を **モナド (Monad)** と定義しました。

$$\mu(r) = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid x - r \in \mathcal{M}\} = st^{-1}(r)$$

モナドを用いることで、標準的な位相空間論における諸概念が、量子子 ( $\forall, \exists$ ) の交差を伴わないシンプルな代数的包含関係に翻訳されます。

- 開集合の超準的特徴づけ**：標準的な集合  $U \subseteq \mathbb{R}$  が開集合である  $\iff$  任意の  $x \in U$  について、 $\mu(x) \subseteq {}^*U$  が成り立つ（無限小だけズラしても、まだその集合の延長の中に留まる）。
- 連続性の超準的特徴づけ**：標準関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が点  $c \in \mathbb{R}$  で連続である  $\iff {}^*f(\mu(c)) \subseteq \mu(f(c))$  が成り立つ（入力の差が無限小であれば、出力の差も必ず無限小になる）。

## 3.4 位相環としての特異な（病的な）性質

順序位相を備えた位相環としての  ${}^*\mathbb{R}$  は、標準的な  $\mathbb{R}$  とは大きく異なる、極めて特異な構造を持っています。

### A. 完全に不連結 (Totally Disconnected) である

${}^*\mathbb{R}$  は、「開集合であり、かつ閉集合でもある（開かつ閉集合：clopen set）」自明でない部分集合を無数に

含みます。その代表例が無限小の集合  $\mathcal{M}$  です。

### 証明 ( $\mathcal{M}$ が開かつ閉であること)

- **開集合であること**： 任意の  $\varepsilon \in \mathcal{M}$  に対し、正の無限小  $\delta = [1, 1/2, 1/3, \dots] \in \mathcal{M}$  を固定する。開区間  $(\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta)$  に属する任意の要素  $x$  は、(無限小) + (無限小) の形になるため必ず無限小である。すなわち、 $(\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta) \subseteq \mathcal{M}$  となり、各点の内点性が示されたため  $\mathcal{M}$  は開集合である。
- **閉集合であること**：  $\mathcal{M}$  の補集合  ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$  (無限小でない集合) を考える。任意の  $a \notin \mathcal{M}$  を取ると、その絶対値はある標準実数  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  より大きい ( $|a| > r$ )。このとき、開区間  $(a - r/2, a + r/2)$  に属する元は、どんなに  $a$  に近くても無限小にはなり得ない。よって補集合も開集合となり、その裏返しとして  $\mathcal{M}$  は閉集合である。

### B. 第1可算公理を満たさない (距離化不可能である)

${}^*\mathbb{R}$  の任意の点 (例えば 0) の周りには、可算個の基本近傍系をとることができません。なぜなら、もし可算個の正の無限小の列  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  をどのように作って減少させていっても、超準モデルの持つ「 $\aleph_1$ -飽和性」により、それらすべてよりも真に小さい正の無限小  $\delta$  が必ず存在してしまうからです。したがって、 ${}^*\mathbb{R}$  の順序位相を通常の距離関数によって定義することは不可能です。

### C. 局所コンパクトではない

0 のどんな閉近傍をとっても、その中には「無限小の隙間」が稠密に詰まっており、有限被覆によってコンパクトに覆い尽くすことができません。ゆえに局所コンパクト性を失っています。

## 第4章：ネット (有向点列) の収束と数列の収束の相違

最後に、位相空間  ${}^*\mathbb{R}$  において、インデックス集合を標準自然数  $\mathbb{N}$  とする「数列」の極限と、インデックス集合を超自然数  ${}^*\mathbb{N}$  (これは順序に関して有向集合をなす) とする「ネット (Net)」の極限との間に生じる、決定的な挙動の違いについて検証します。

### 4.1 問題の設定

インデックス有向集合を  ${}^*\mathbb{N}$  とする、 ${}^*\mathbb{R}$  におけるネット  $A$  を以下のように定義します。

$$A : {}^*\mathbb{N} \rightarrow {}^*\mathbb{R}, \quad N \mapsto A_N = 1 - \frac{1}{10^N}$$

## 4.2 順序位相における収束の証明

### 定理 4.1

上記で定義されたネット  $A_N$  は、 ${}^*\mathbb{R}$  の順序位相において  $1$  に収束する。

### 証明

位相空間におけるネットの収束の定義に従う。 $1$  の任意の順序開近傍  $V$  をとる。順序位相の基底の定義より、ある正の超実数  $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$  (**これが無限小であってもよい**) が存在して、开区間  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subseteq V$  とできる。

このとき、ある基準インデックス  $N_0 \in {}^*\mathbb{N}$  が存在して、

$$N \geq N_0 \implies A_N \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \iff 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{10^N} < 1 + \varepsilon \iff \frac{1}{10^N} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せばよい。

正の超実数  $\varepsilon$  を実数列の同値類として  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots]$  と表現する (ほとんどすべての  $n$  で  $\varepsilon_n > 0$ )。

標準実数  $\mathbb{R}$  が持つアルキメデス性により、各成分の正の実数  $\varepsilon_n$  に対して、

$$\frac{1}{10^{k_n}} < \varepsilon_n$$

を満たすような標準自然数  $k_n \in \mathbb{N}$  が必ず存在する。

ここで、これらの自然数を束ねた無限大超自然数  $K \in {}^*\mathbb{N}$  を  $K = [k_1, k_2, k_3, \dots]$  と定義する。超積の順序の定義から、

$$\frac{1}{10^K} = \left[ \frac{1}{10^{k_1}}, \frac{1}{10^{k_2}}, \frac{1}{10^{k_3}}, \dots \right] < [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots] = \varepsilon$$

が厳密に成立する。

ここで、ネットの収束の基準点として  $N_0 = K$  を選択する。関数  $N \mapsto \frac{1}{10^N}$  の単調減少性により、任意の  $N \in {}^*\mathbb{N}$  が  $N \geq N_0$  を満たすならば、

$$\frac{1}{10^N} \leq \frac{1}{10^{N_0}} = \frac{1}{10^K} < \varepsilon$$

が成り立つ。

したがって、どれほど小さな（無限小の） $\varepsilon > 0$  を提示されても、それに対応する超自然数の基準点  $N_0 \in {}^*\mathbb{N}$  を指定することができ、それ以降のネットの項をすべて 1 の  $\varepsilon$ -近傍に閉じ込めることができる。

ゆえに、ネット  $A_N$  は  ${}^*\mathbb{R}$  の順序位相で 1 に収束する。 ■

### 4.3 可算数列の発散との決定的な違い：共終性（Cofinality）の議論

一方で、インデックス集合を標準自然数  $\mathbb{N}$  に限定した通常の可算数列  $a_n = 1 - 1/10^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を考えた場合、これは  ${}^*\mathbb{R}$  の順序位相において、いかなる超実数にも収束しません（発散します）。

この劇的な挙動の違いは、インデックス集合が持つ「共終性（Cofinality）」の差に由来します。

構造	インデックス集合	順序位相での収束性	共終性のメカニズム
可算数列	$\mathbb{N}$ (標準自然数)	発散	$\mathbb{N}$ は ${}^*\mathbb{R}$ の中で「上に有界」である。特定の無限小の壁（例: $1/10^H$ ）を、可算回の有限ステップでは絶対に突破して内側に入り込めない。
ネット	${}^*\mathbb{N}$ (超自然数)	1 に収束	${}^*\mathbb{N}$ は ${}^*\mathbb{R}$ の無限大方向へ「共終」である。どんな微細な無限小近傍を課されても、最初からインデックス自体の中にそれを突破できる「無限大の番号」が含まれている。

### 4.4 総括

インターネット上の俗説等で散見される「超準解析（あるいは無限小の数学）を用いれば、 $0.999\dots \neq 1$  であることが厳密に正当化される」という主張は、これまで見てきた現代数学の厳密な定義に照らし合わせると、二重の文脈誤認を起こしていることが分かります。

- 「 $0.999\dots$ 」を標準的な可算数列の極限の延長として  ${}^*\mathbb{R}$  の順序位相のなかで捉えようとするならば、その数列は無限小の境界を跨ぐことができず、**そもそもどこにも収束しない（数として完結しない）**。
- 「 $0.999\dots$ 」をインデックスを有向集合  ${}^*\mathbb{N}$  まで拡張したネットの極限、あるいは移行原理に耐えうる内部的な超有限和の標準パートとして捉えるならば、それは超準世界においても**完全に 1 と一致する**。

したがって、超フィルターによって基礎付けられた厳密な超実数の位相空間論の枠組みにおいても、「 $0.999\dots \neq 1$ 」を固定的な一つの数として矛盾なく定置する余地は存在せず、むしろ超準世界におけるインデックスの共終性のダイナミズムが、標準的な実数の性質をより強固に裏付けていることが理解できます。